Dowodzenie

Zadanie 1

Wykaż, że jeżeli a, b są długościami przyprostokątnych trójkąta prostokątnego oraz c jest długością przeciwprostokątnej tego trójkąta, to $a+b \leqslant c\sqrt{2}$.

Zadanie 2

Wykaż, że jeżeli w prostopadłościanie a, b, c są długościami krawędzi wychodzącymi z jednego wierzchołka oraz d jest długością przekątnej tego prostopadłościanu, to $a+b+c \leqslant d\sqrt{3}$.

Zadanie 3

Wykaż, że jeżeli $x+y=a$, to $x^2+y^2 \geqslant \frac{a^2}{2}$.

W szczególności, gdy $x+y=1$, to $x^2+y^2 \geqslant \frac{1}{2}$.

Zadanie 4

Wykaż, że jeżeli $x+y+z=a$, to $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{a^2}{3}$.

W szczególności $x+y+z=1$, to $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Zadanie 5

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz.$$

Zadanie 6

Wykaż, że jeżeli $x>0$, $y>0$ oraz $xy=25$, to $(1+x)(1+y) \geqslant 36$.

Zadanie 7

Wykaż, że jeżeli a, b, x są liczbami dodatnimi oraz $ab=4$, to $(a+x)(b+x) \geqslant (x+2)^2$.

Zadanie 8

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi oraz $xyz=1$, to

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geqslant 8.$$

Zadanie 9

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to

$$(x+y)(x+z)(y+z) \geqslant 8xyz.$$

Zadanie 10

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to

$$xy+yz+zx \geqslant x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}.$$

Zadanie 11

Wykaż, że jeżeli a, b, c, d są liczbami dodatnimi, to

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geqslant 2\sqrt[4]{abcd}.$$

Zadanie 12

Wykaż, że jeżeli x, y są liczbami dodatnimi oraz $x+y=16$, to

$$(1+x)(1+y) \leqslant 81.$$

Zadanie 13

Wykaż, że jeżeli $x > 0$, to $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

Zadanie 14

Wykaż, że jeżeli $x < 0$, to $x + \frac{1}{x} \leqslant -2$.

Zadanie 15

a) Jeżeli $ab > 0$, to

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2.$$

b) Jeżeli $ab < 0$, to

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant -2.$$

Zadanie 16

Wykaż, że jeżeli $xy > 0$, to $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geqslant 4$.

Zadanie 17

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9$.

Zadanie 18

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to

$$xy(x+y-2z) + yz(y+z-2x) + xz(x+z-2y) \geqslant 0.$$

Zadanie 19

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \geqslant x+y+z.$$

Zadanie 20

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi oraz $xyz = 1$, to

$$xy + xz + yz + x + y + z \geqslant 6.$$

Zadanie 21

Dany jest trójkąt ostrokątny równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. Odcinek AD jest wysokością tego trójkąta. Udowodnij, że $\sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle BAD$.

Zadanie 22

Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC wybrano punkty D i E w taki sposób, by $AC = AE$ oraz $BC = BD$. Udowodnij, że $\sphericalangle DCE = 45^\circ$.

Zadanie 23

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ oraz $\sphericalangle ACB = \gamma$. Na bokach BC, AC i AB tego trójkąta wybrano odpowiednio punkty D, E i F w taki sposób, by $AE = AF$, $BD = BF$ i $CD = CE$. Udowodnij, że

$$\sphericalangle EFD = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Zadanie 24

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P, Q, R i S są punktami przecięcia dwusiecznych kątów zewnętrznych czworokąta $ABCD$. Udowodnij, że sumy przeciwległych kątów czworokąta $PQRS$ są równe.