

LISTA NR 5 (Sumy algebraiczne) POZIOM PODSTAWOWY

1. Zapisz następujące wyrażenia w postaci iloczynu czynników możliwie najniższego stopnia:

a) $w(x) = x^2(x-1) - 4(x-1)$

e) $w(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$

b) $w(x) = 3x(x^2 + 5) - (x^2 + 5)$

f) $w(x) = -6x^3 - x^2 + 2x$

c) $w(x) = x^5(2x-1) - 5x^3(2x-1)$

g) $w(x) = x^3 - 8$

d) $w(x) = -x^3 + 7x$

h) $w(x) = 3x(x^3 + 27) + 2x^3 + 54$

UWAGA: w przykładzie f) doprowadź do postaci, w której wszystkie współczynniki wielomianu $w(x)$ są liczbami całkowitymi.

2. Rozwiąż równania:

a) $(x^2 - 2)(x^2 + 4x + 4) = 0$

b) $3x^4 - 24x^2 = 0$

c) $9x^4 - 25 = 0$

d) $-12x^3 - 14x^2 + 10x = 0$

e) $x^3(x+5) = 8(x+5)$

3. Wiedząc, że $w(x) = Q(x) \cdot T(x) + R(x)$, gdzie $Q(x) = x^2 - x + 2$, $T(x) = 4x - 4$ i $R(x) = -13x + 10$ rozwiąż równanie $w(x) = 4x^3 + 14x$.

4. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź podstawy a ma długość $x - 1$, a wysokość $h = x + 2$. Zapisz wyrażenie $V(x)$ opisujące objętość tego graniastosłupa, ustal jego dziedzinę i wykaż, że jego objętość dla $x = \sqrt{3}$ jest liczbą wymierną.

5. Pierwiastkami równania $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ są liczby 1 i -2 . Znajdź a i b oraz trzeci pierwiastek tego równania.
6. Wykaż, że suma odwrotności pierwiastków równania $(4x^2 - 7)(3x - 1)(2x - 1) = 0$ jest liczbą pierwszą.
7. Sprawdź, czy równania $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$ i $x(x+3) = 4$ mają wspólne pierwiastki.
8. Sprawdź, czy wartość $w(x) = x^3 + x^2 - 8x + 5$ dla liczby $1 + \sqrt{3}$ jest liczbą wymierną.
9. Wykaż, że $n^3 - n$ dla dowolnego $n \in N_+$ jest podzielne przez 6.

ODPOWIEDZI – lista nr 5

1.

a) $w(x) = (x-1)(x-2)(x+2)$

b) $w(x) = (3x-1)(x^2+5)$

c) $w(x) = x^3(2x-1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

d) $w(x) = -x(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$

e) $w(x) = x^2(x-2)(x-3)$

f) $w(x) = -x(2x-1)(3x+2)$

g) $w(x) = (x-2)(x^2+2x+4)$

h) $w(x) = (3x+2)(x+3)(x^2-3x+9)$

2.

a) $x \in \{\pm\sqrt{2}, -2\}$

b) $x \in \{0, \pm 2\sqrt{2}\}$

c) $x \in \left\{\pm \frac{\sqrt{15}}{3}\right\}$

d) $x \in \left\{-\frac{3}{5}, 0, \frac{1}{2}\right\}$

e) $x \in \{-5, 2\}$

3. $x \in \left\{-2, \frac{1}{8}\right\}$

4. $V(x) = x^3 - 3x + 2$, $D = (1, \infty)$, $V(\sqrt{3}) = 2 \in W$

5. $a = -2$, $b = 0$, trzeci pierwiastek $x_3 = 0$

6. $x_1 = -\frac{\sqrt{7}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 5$ (a 5 jest liczbą pierwszą)

7. tak, $x = 1$

8. tak, 11

9.

Zauważ, że $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ czyli mamy iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych.

Wśród trzech kolejnych liczb naturalnych jest zawsze co najmniej jedna liczba parzysta (czyli podzielna przez 2) i dokładnie jedna podzielna przez 3 (wyjaśnij dlaczego), a zatem ich iloczyn jest podzielny przez 6.