***Zadania krótkiej odpowiedzi na dowodzenie***

**I. Co powinieneś umieć, zdając egzamin maturalny z matematyki (c.d.).**
Uczeń prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.

**II. Przykłady zadań egzaminacyjnych.**

**Zad 1.** Punkt E jest środkiem boku AB równoległoboku ABCD. Punkt ten połączono z wierzchołkiem C. Uzasadnij, że pole trójkąta EBC jest trzy razy mniejsze od pola czworokąta AECD.

**Zad 2.** Dany jest trapez ABCD. Narysowano jego przekątne, które przecięły się w punkcie S. Udowodnij, że trójkąty ASD i BSC mają równe pola, a trójkąty ABS i CDS są podobne.

**Zad 3.** Uzasadnij, że dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta ABC i dwusieczna kąta zewnętrznego przy tym samym wierzchołku są prostopadłe. Pamiętaj, że kątem zewnętrznym trójkąta nazywamy kąt przyległy do kąta wewnętrznego.

**Zad 4.** Boki równoległoboku ABCD są równe a i b (a > b). Uzasadnij, że długości odcinków, na które dwusieczna kąta ostrego równoległoboku podzieli bok o długości a, wynoszą b oraz a – b.

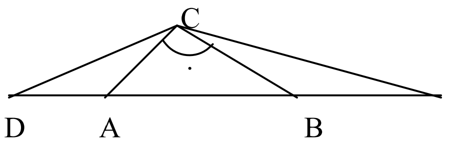
**Zad 5.** Uzasadnij, że w trapezie prostokątnym różnica kwadratów podstaw jest równa różnicy kwadratów przekątnych.

**Zad 6.** W równoległoboku $ABCD$, w którym bok $AB$ jest dwa razy dłuższy od boku $BC$, połączono środek $M$ boku $AB$ z wierzchołkami $C$ i $D$. Udowodnij, że kąt $CMD$ jest prosty.

**Zad 7.** Dany jest trójkąt ostrokątny równoramienny $ABC$, w którym $AC = BC$. Odcinek $AD$ jest wysokością tego trójkąta. Udowodnij, że $\angle ACB = 2 \cdot \angle BAD$.

**Zad 8.** W trójkącie prostokątnym ABC wykonano następujące czynności:

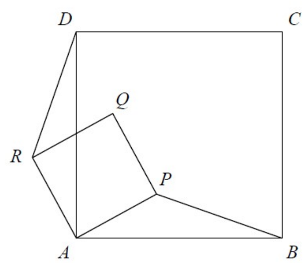
**a)** przedłużono przeciwprostokątną AB,
**b)** odłożono odcinki AD = AC oraz BE = BC.




Uzasadnij, że kąt DCE ma $135^{O}$.

Zad 9. Na przeciwprostokątnej $AB$ trójkąta prostokątnego $ABC$ wybrano punkty $D$ i $E$ w taki sposób, by $AC = AE$ oraz $BC = BD$. Udowodnij, że $\angle DCE = 45^\circ$.

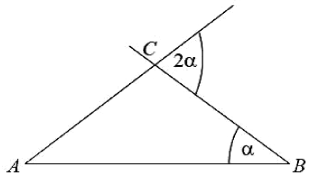
Zad 10. Czworokąty ABCD i APQR są kwadratami (patrz rysunek). Udowodnij, że BP = DR .




***Przygotował: Paweł Słaby***

***Zadania krótkiej odpowiedzi na dowodzenie***

Zad 11. Uzasadnij , że oba kąty przy podstawie AB trójkąta ABC są równe .




Zad 12. Na bokach $AB$, $BC$ i $CA$ trójkąta równobocznego $ABC$ leżą odpowiednio punkty $D$, $E$ i $F$ tak, że $AD = BE = CF$. Udowodnij, że trójkąt $DEF$ jest równoboczny.

**Zad 13.** **Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geqslant \frac{a+1}{2}$.**

**Zad 14.** **Uzasadnij, że jeśli $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2$, to $ad = bc$.**

**Zad 15.** **Uzasadnij, że jeżeli $a+b=1$ i $a^2+b^2=7$, to $a^4+b^4=31$.**

Zad 16. Udowodnij, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a+b=1$, to $ab \leq \frac{1}{4}$.

**Zad 17.** Wykaż, że jeżeli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $\sqrt{a^2+b} = \sqrt{a+b^2}$, to $a = b$ lub $a+b=1$..

Zad 18. Uzasadnij, że jeśli $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{a+b}{2}$ to $a = b$.

Zad 19. Wiadomo, że $a > 0$ i $\frac{1}{a} + a = 2$. Wykaż, że $a^2 + \frac{1}{a^2} - a + \frac{1}{a}$.

**Zad 20.** Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 4.

**Zad 21.** Udowodnij, że każda liczba całkowita $k$, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.

**Zad 22.** Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb podzielnych przez 3 dzieli się przez 81.

**Zad 23.** Udowodnij, że suma czterech kolejnych, naturalnych liczb nieparzystych, następujących po liczbie 2k, jest podzielna przez 8.

**Zad 24.** Wykaż, że liczba $2^{13} + 2^{15} + 2^{17}$ jest podzielna przez 21.

Zad 25. Wykaż, że liczba $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

**Zad 26.** Wykaż, że liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ $(n \in N_+)$ jest wielokrotnością liczby 10.

Zad 27. Wykaż, że suma trzech kolejnych naturalnych potęg liczby 3 jest podzielna przez 13.

**Zad 28.** Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest podzielna przez 3. Wykaż, że ta liczba dwucyfrowa jest podzielna przez 3.

**Zad 29.** Wykaż, że jeśli w liczbie trzycyfrowej środkowa cyfra jest równa sumie skrajnych cyfr, to liczba ta jest podzielna przez 11.

***Przygotował: Paweł Słaby***