Dowody geometryczne

1. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami czworokąta wpisanego w okrąg, w którym $|AB|+|AD|=|CD|+|CB|$, $|\sphericalangle BAD|=\alpha$. Uzasadnij, że $\frac{|AB|\cdot|AD|}{|CD|\cdot|CB|}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

2. Wykaż, że jeśli przekątne trapezu są prostopadłe, to suma kwadratów długości tych przekątnych jest równa kwadratowi długości jego podstaw.

3. Wykaż, że suma kwadratów długości wszystkich boków równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości jego przekątnych.

4. Wyznacz długości boków równoległoboku wiedząc, że krótsza przekątna tego równoległoboku ma długość d i dzieli jego kąt rozwarty na kąty α i β.

5. Wykaż, że jeżeli p, q są długościami przekątnych rombu o kącie ostrym 30°, przy czym $p<q$, to $\frac{p}{q}=2-\sqrt{3}$.

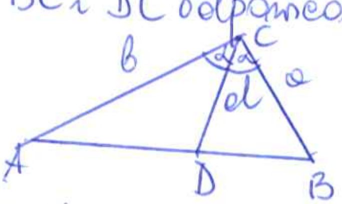
6. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne przecinają się w punkcie E. Wykaż, że pole powierzchni trójkąta AED jest średnią geometryczną pól trójkątów ABE i DEC.

7. W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę CD, która przecięła średnicę AB w punkcie M, dzieląc ją na odcinki AM i MB. Wiedząc, że M jest środkiem cięciwy CD. Wykaż, że pole czworokąta $ACBD$ jest równe połowie iloczynu długości odcinków $|AB|$ i $|CD|$.

8. W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$ i $|AB|=2a$, $|CD|=a$, przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DAB. Wykaż, że promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC określa się wzorem $r=\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$.

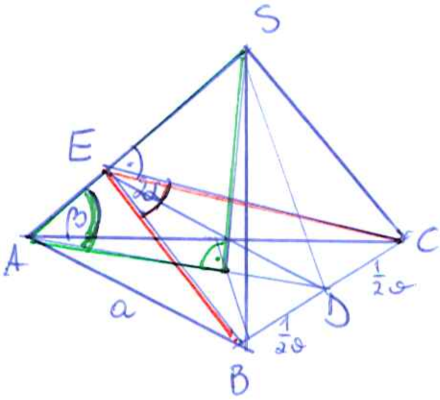
9 Dany jest trójkąt ABC, w którym $|BC| = a$, $|AC| = b$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$. Punkt D jest środkiem boku AB tego trójkąta. Wykaż, że $|CD| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - ab + b^2}$

10 Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB tego trójkąta w punkcie D. Oznaczmy długości odcinków AC, BC i DC odpowiednio b, a, d (rys). Wykaż, że $d < \frac{2ab}{a+b}$

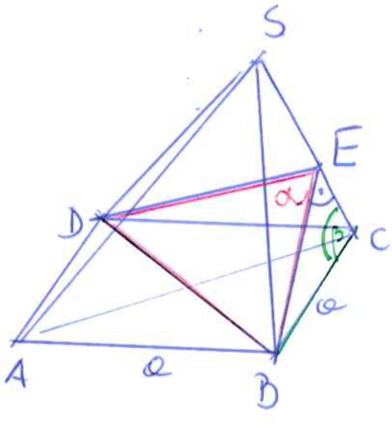


11 Graniastosłup prosty ma w podstawie trójkąt równoramienny o ramieniu długości a. Pole powierzchni dwóch przystających ścian bocznych tego graniastosłupa jest dwa razy większe od pola powierzchni jego podstawy. Wykaż, że wysokość tego graniastosłupa jest nie większa od $\frac{a}{2}$.

12 Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę 2α. Kąt β jest kątem nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy (rys. obok). Wykaż, że $\sin\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



13 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Kąt α jest kątem dwuściennym między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi. Kąt β jest kątem przy podstawie ściany bocznej (tzn. kątem między krawędzią boczną ostrosłupa a krawędzią podstawy). Wykaż, że $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta = -1$



14 Wysokość prawidłowego ostrosłupa sześciokątnego jest równa H, a krawędź podstawy ma długość a. Wykaż, że pole przekroju wyznaczonego przez krótszą przekątną podstawy i wierzchołek tego ostrosłupa jest równe: $P = \frac{a\sqrt{12H^2 + 3a^2}}{4}$

15. Wykaż, że jeśli kąt rozwarcia stożka ma 120°, to pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe polu powierzchni bocznej walca o takiej samej podstawie i wysokości.

Dowody algebraiczne

1. Wykaż, że iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 24.

2. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $5n^2+10n+8$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3.

3. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $4n^3+20n-12$ jest podzielna przez 12.

4. Wykaż, że liczba 25^8-23^8 jest podzielna przez 1154.

5. Wykaż, że jeżeli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

6. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n, liczba n^5+4n jest podzielna przez 5.

7. Wykaż, że dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność:
$$a+b+\frac{a+b}{ab}\geq 4.$$

8. Wykaż, że jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R_+$ i $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, to $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\geq 2^n$.

9. Wykaż, że jeżeli $a>0$ i $b>0$ i $c>0$ i $a+b+c=1$, to $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leq 5$.

10. Wykaż, że dana nierówność $x^4+3x^3+6x^2+7x+3\geq 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

11. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność:
$$2x^2+5y^2-4xy>2x+4y-5.$$

12. Wykaż, że wyrażenie $x^4-7x^2+4x+25$ osiąga najmniejszą wartość dla $x=-2$.

13. Uzasadnij, że nierówność $x^8+x^6-4x^4+x^2+1 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej.

14. Wykaż, że jeżeli $\log_2 3 = a$, to $\log_{24} 54 = \frac{3a+1}{a+3}$

15. Wiedząc, że $\frac{\log 8}{\log 81} = a$ i $\frac{1}{\log 64} = b$. Wykaż, że wartość wyrażenia $27^{4a}+16^{3b}$ jest równa 612.

16. Wykaż, że jeżeli $x>0$, to $x^4+\frac{250}{x^2} \geq 75$.

17. Wykaż, że jeśli ciąg (ab, b^2, c^2) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg $(b, c, 2b-a)$ jest ciągiem geometrycznym.

18. Funkcja f określona wzorem

$$f(x) = 1+\frac{x+3}{x+5}+\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^2+\ldots$$

gdzie $1+\frac{x+3}{x+5}+\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^2+\ldots$ jest szeregiem geometrycznym zbieżnym. Wykaż, że $f(2019)<f(2020)$.

19. Niech A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w zbiorze Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A)=\frac{2}{3}$ i $P(B)=\frac{3}{5}$, to $P(A|B) \geq \frac{4}{9}$.

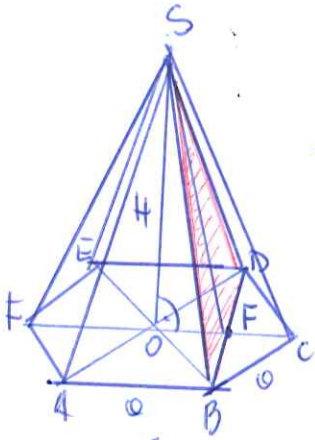
20. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego, będących liczbami całkowitymi różnymi od zera jest podzielna przez sumę tych wyrazów.

Matematyka to wiesz, że umiesz.

Powodzenia

Reg

14

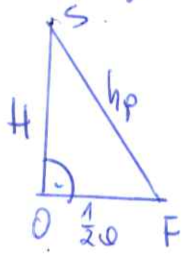


Wprowadźmy oznaczenia jak na rys.

T: $P_{\triangle BDS} = \frac{a\sqrt{12H^2+3a^2}}{4}$

D: $P_{\triangle BDS} = \frac{1}{2}|BD|\cdot|FS|$

$|BD| = a\sqrt{3}$, - dł. krótszej przekątnej podst.



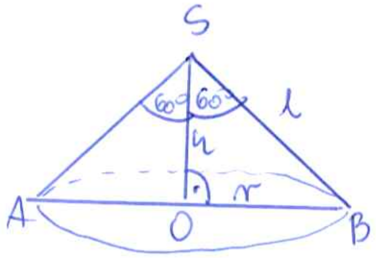
$\triangle OFS$ - jest prostokątny, w którym

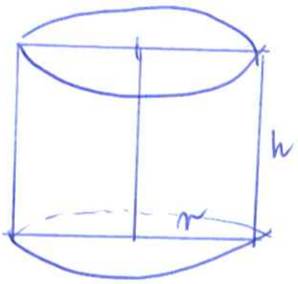
$|OF| = \frac{1}{2}a$, z tw. Pitagorasa $\Rightarrow$

$h_p^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + H^2 \Rightarrow h_p = \sqrt{\frac{a^2}{4}+H^2} = \frac{\sqrt{a^2+4H^2}}{2}$

$P_{\triangle BDS} = \frac{1}{2}\cdot a\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{a^2+4H^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3a^2+12H^2}}{4}$ cnd.

15





z warunków zadania $\Rightarrow$

$h = \frac{1}{2}l$; $r = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, bo $\triangle BOS$ jest $\triangle$ prost.

$P_{b\,stożka} = \pi r l = \pi\frac{l\sqrt{3}}{2}\cdot l = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi l^2$

$P_{b\,walca} = 2\pi r h = 2\pi\cdot\frac{l\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}l = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi l^2$ $\Rightarrow$

$P_{b\,stożka} = P_{b\,walca}$