

**Zadanie 15. (0-7)**

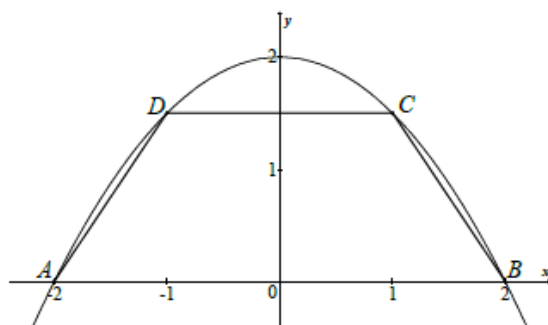
Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy 1:2 oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

**Zadanie 17. (0-7)**

Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni całkowitej jest równe  $2\pi$ . Oblicz promień podstawy tego walca, który ma największą objętość. Podaj tę największą objętość.

**Zadanie 16. (0-7)**

Parabola o równaniu  $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$  przecina oś  $Ox$  układu współrzędnych w punktach  $A = (-2, 0)$  i  $B = (2, 0)$ . Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne  $ABCD$ , których dłuższą podstawą jest odcinek  $AB$ , a końce  $C$  i  $D$  krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek).



Wyznacz pole trapezu  $ABCD$  w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka  $C$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$  tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.

**Zadanie 16. (0-7)**

Rozpatrujemy wszystkie stożki, w których suma długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 2. Wyznacz wysokość tego spośród rozpatrywanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.

**Zadanie 16. (0-7)**

Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

**Zadanie 15. (0-7)**

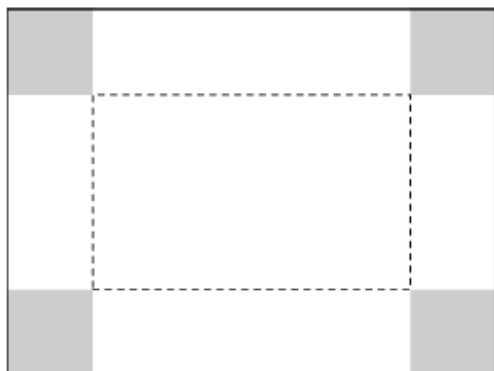
Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej  $P$ . Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

**Zadanie 18. (0-7)**

Na kuli o promieniu  $R$  opisano ostrosłup prawidłowy czworokątny o najmniejszej objętości. Wyznacz długość jego wysokości.

**Zadanie 18. (0–7)**

Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek).



Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku każdego z wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę maksymalną objętość.

**Zadanie 18. (0–7)**

Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 4 dm. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole.

---

**Zadanie 8. (0-2)**

Oblicz granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n+2} - \frac{(n+2)^2}{n+444} \right)$ .

**Zadanie 10. (0-2)**

Oblicz granicę ciągu określonego wzorem ogólnym  $a_n = \frac{(n+4)(3n^2-1)}{11n^3+5n+2}$ . Podaj przybliżenie wyniku z dokładnością do trzech miejsc po przecinku. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego przybliżenia.

**Zadanie 6. (0-2)**

Oblicz granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{11n^3+6n+5}{6n^3+1} - \frac{2n^2+2n+1}{5n^2-4} \right)$ . W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

**Zadanie 9. (0-2)**

Oblicz granicę ciągu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2-2n+3}+3n}{7n-2}$ . Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego wyniku.

**Zadanie 9. (0-2)**

Oblicz granicę  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{11n^2-1}$ . Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

**Zadanie 7. (0-2)**

Oblicz granicę ciągu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-5n+2}{(8n+7)(n+4)}$ .

2. Oblicz granicę.

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-9x}{3-x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x+6}{x^2+5x-6}$

g)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+9x+14}{x^2+3x+2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x^2-4x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2-8x+1}{4x^2-1}$

h)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3-x^2-12x}{2x+6}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+3x-2}{x+2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+7x-8}{x^3-1}$

4. Oblicz granicę.

a)  $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\sqrt{3-x}}{2-x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+4}-1}{2x+6}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{1-\sqrt{x^2-3}}$

**Zadanie 14. (0–3)**

Dana jest parabola o równaniu  $y = x^2 + 1$  i leżąca na niej punkt  $A$  o współrzędnej  $x$  równej 3. Wyznacz równanie stycznej do tej paraboli w punkcie  $A$ .

**Zadanie 6. (0–3)**

Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie  $P = (1, 0)$ .

**Zadanie 12. (0–4)**

Funkcja  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji  $f$ , które są równoległe do prostej o równaniu  $y = 4x$ .

**Zadanie 10. (0–3)**

Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = x^4$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu funkcji  $f$ , która jest równoległa do prostej  $y = 4x + 7$ .

**Zadanie 8. (0–2)**

Dana jest funkcja określona wzorem  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$ . Oblicz wartość pochodnej tej funkcji dla  $x = -\sqrt{7}$ . Zakoduj cyfrę jedności i dwie początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

**Zadanie 6. (0-2)**

Oblicz wartość pochodnej funkcji  $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$  w punkcie  $x_0 = -4$ . Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego wyniku.

**Zadanie 8. (0–2)**

Dana jest funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \frac{x-8}{x^2+6}$$

dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie  $x = \frac{1}{2}$ .

**Zadanie 9. (0–2)**

Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x \neq 4$ . Oblicz pochodną funkcji  $f$  w punkcie  $x = 12$ .

**Zadanie 12. (0–3)**

Niech  $P_n$  oznacza pole koła o promieniu  $\frac{1}{2^n}$ , dla  $n \geq 1$ . Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu  $(P_n)$ .

**Zadanie 14. (0–6)**

Wyznacz równania wszystkich wspólnych stycznych do paraboli o równaniu  $y = \frac{1}{2}x^2$  i okręgu o równaniu  $x^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 2$ .

**Zadanie 13. (0–3)**

Wykaż, że funkcja  $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-1}$  ma dokładnie jedno ekstremum lokalne i określ, czy to jest minimum czy maksimum.