8. STATYSTYKA. KOMBINATORYKA I RACH. PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

ZADANIE 1 (1 PKT)

Średnia arytmetyczna czterech liczb: $x-1, 3x, 5x+1$ i $7x$ jest równa 72. Wynika stąd, że
A) $x=9$ B) $x=17$ C) $x=10$ D) $x=18$

ROZWIĄZANIE

Rozwiązujemy równanie

$$\frac{(x-1)+3x+(5x+1)+7x}{4}=72$$
$$\frac{16x}{4}=72 \quad \Rightarrow \quad 4x=72 \quad \Rightarrow \quad x=18.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 2 (1 PKT)

Jeżeli do zestawu czterech danych: $4,7,8,x$ dołączymy liczbę 2, to średnia arytmetyczna wzrośnie o 2. Zatem
A) $x=-6$ B) $x=-51$ C) $x=10$ D) $x=29$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{4+7+8+x}{4}=\frac{4+7+8+x+2}{5}-2$$
$$\frac{19+x}{4}=\frac{21+x}{5}-2 \quad / \cdot 20$$
$$95+5x=84+4x-40$$
$$x=-51.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 3 (1 PKT)

Średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, 9 jest taka sama jak średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, 9, x. Wynika stąd, że
A) $x=6$ B) $x=3$ C) $x=0$ D) $x=5$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{2+4+7+8+9}{5}=\frac{2+4+7+8+9+x}{6}$$
$$6=\frac{30+x}{6}$$
$$36=30+x \quad \Rightarrow \quad x=6.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 4 (1 PKT)

Średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, x jest równa n, natomiast średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, x, $2x$ jest równa $2n$. Wynika stąd, że
A) $x = 14$ B) $x = 21$ C) $x = 49$ D) $x = 7$

ROZWIĄZANIE

Mamy

$$\begin{cases} \frac{2+4+7+8+x}{5} = n \\ \frac{2+4+7+8+x+2x}{6} = 2n. \end{cases}$$

Podstawiamy teraz n z pierwszego równania do drugiego i mamy

$$\frac{2+4+7+8+x+2x}{6} = 2\cdot\frac{2+4+7+8+x}{5} \quad / \cdot 30$$
$$105 + 15x = 252 + 12x \quad \Rightarrow \quad 3x = 147 \quad \Rightarrow \quad x = 49.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 5 (1 PKT)

Średnia arytmetyczna sześciu liczb naturalnych: 31, 16, 25, 29, 27, x, jest równa $\frac{x}{2}$. Mediana tych liczb jest równa
A) 26 B) 28 C) 29 D) 27

ROZWIĄZANIE

Wykorzystujemy podaną informację o średniej, aby obliczyć x.

$$\frac{31+16+25+29+27+x}{6} = \frac{x}{2} \quad / \cdot 6$$
$$128 + x = 3x \quad \Rightarrow \quad 2x = 128 \quad \Rightarrow \quad x = 64.$$

Wypisujemy teraz dane liczby w kolejności rosnącej.

$$16,\ 25,\ 27,\ 29,\ 31,\ 64.$$

Liczb jest 6, więc mediana to średnia dwóch środkowych liczb.

$$\frac{27+29}{2} = 28.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 6 (1 PKT)

Ile jest wszystkich czterocyfrowych liczb naturalnych mniejszych niż 2017?
A) 1016 B) 1017 C) 2016 D) 2017

ROZWIĄZANIE

Wszystkich liczba naturalnych mniejszych od 2017 jest 2016:

$$1, 2, 3, \ldots, 2015, 2016.$$

Wśród niech jest 999 liczb, które nie są czterocyfrowe:

$$1, 2, 3, \ldots, 999.$$

W takim razie jest

$$2016 - 999 = 1017$$

liczb czterocyfrowych mniejszych od 2017.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 7 (1 PKT)

Ile jest wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 3?

A) 29 B) 12 C) 30 D) 24

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Liczby dwucyfrowe podzielne przez 3 to

$$12 = 3 \cdot 4,\ 15 = 3 \cdot 5,\ 18 = 3 \cdot 6, \ldots,\ 99 = 3 \cdot 33.$$

Jest ich więc $33 - 3 = 30$.

Sposób II

Dwucyfrowe liczby podzielne przez 3 tworzą ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy $r = 3$, w którym $a_1 = 12$ i $a_n = 99$. Mamy zatem

$$\begin{aligned}
99 &= a_n = a_1 + (n-1)r \\
99 &= 12 + (n-1) \cdot 3 \\
87 &= (n-1) \cdot 3 \\
29 &= (n-1) \quad \Rightarrow \quad n = 30.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 8 (1 PKT)

Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 4?

A) 6 B) 4 C) 3 D) 8

ROZWIĄZANIE

Skoro iloczyn cyfr ma być równy 4, to cyframi liczby muszą być dwie jedynki i czwórka, lub jedynka i dwie dwójki. Łatwo wypisać wszystkie takie liczby

$$114,\ 141,\ 411,$$
$$122,\ 212,\ 221.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 9 (1 PKT)

Ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 6 i niepodzielnych przez 9?

A) 6 B) 10 C) 15 D) 12

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Dwucyfrowe liczby podzielne przez 6 to

$$12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,\ 48,\ 54,\ 60,\ 66,\ 72,\ 78,\ 84,\ 90,\ 96.$$

Wśród tych liczb jest 5 liczb podzielnych przez 9:

$$18,\ 36,\ 54,\ 72,\ 90.$$

W sumie jest więc $15-5=10$ takich liczb.

Sposób II

Dwucyfrowe liczby podzielne przez 6 to

$$12=6\cdot 2,\ 18=6\cdot 3,\cdots 96=6\cdot 16.$$

Jest ich więc $16-1=15$. Liczby podzielne przez 6 i 9 to liczby podzielne przez 18, czyli liczby:

$$18,\ 36,\ 54,\ 72,\ 90.$$

W sumie jest więc $15-5=10$ takich liczb.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, większych 3000, utworzonych wyłącznie z cyfr 1, 2, 3, przy założeniu, że cyfry mogą się powtarzać, ale nie wszystkie z tych cyfr muszą być wykorzystane?

A) 6 B) 9 C) 3 D) 27

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Skoro liczby mają być większe od 3000, to pierwsza cyfra każdej z takich liczb musi być równa 3. Każdą z pozostałych 3 cyfr możemy wybrać dowolnie spośród liczb: 1, 2, 3. Jest więc

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

takich liczb.

Sposób II

Wypisujemy wszystkie liczby spełniające warunki zadania.

$$\begin{aligned}&3111,\ 3112,\ 3121,\ 3211,\ 3113,\ 3131,\ 3311,\ 3122,\ 3212,\ 3221,\\&3133,\ 3313,\ 3331,\ 3123,\ 3132,\ 3213,\ 3312,\ 3231,\ 3321,\ 3222,\\&3223,\ 3232,\ 3322,\ 3233,\ 3323,\ 3332,\ 3333.\end{aligned}$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Jeżeli A jest zdarzeniem losowym, a A' – zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A oraz zachodzi równość $P(A) = 2 \cdot P(A')$, to

A) $P(A) = \frac{1}{6}$ B) $P(A) = \frac{2}{3}$ C) $P(A) = \frac{1}{3}$ D) $P(A) = \frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego spełnia warunek $P(A') = 1 - P(A)$, co prowadzi do równości

$$\begin{aligned}&P(A) = 2(1 - P(A))\\&P(A) = 2 - 2P(A)\\&3P(A) = 2 \quad / : 3\\&P(A) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 12 (1 PKT)

W grupie jest 15 kobiet i 18 mężczyzn. Losujemy jedną osobę z tej grupy. Prawdopodobieństwo tego, że będzie to kobieta, jest równe

A) $\frac{1}{15}$ B) $\frac{15}{18}$ C) $\frac{15}{33}$ D) $\frac{1}{33}$

ROZWIĄZANIE

Prawdopodobieństwo wybrania kobiety jest równe

$$\frac{15}{15+18} = \frac{15}{33}.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 13 (1 PKT)

Ze zbioru $\{0,1,2,\ldots,15\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby pierwszej jest równe

A) $\frac{7}{16}$ B) $\frac{6}{15}$ C) $\frac{7}{15}$ D) $\frac{3}{8}$

ROZWIĄZANIE

Liczby pierwsze w podanym zbiorze to

$$2,3,5,7,11,13.$$

Zatem prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$$

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Ze zbioru dwudziestu czterech kolejnych liczb naturalnych od 1 do 24 losujemy jedną liczbę. Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba będzie dzielnikiem liczby 24. Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{6}$

ROZWIĄZANIE

W danym zbiorze jest 8 dzielników liczby 24:

$$1,2,3,4,6,8,12,24.$$

Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 15 (1 PKT)

W pewnej klasie stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy 4:5. Losujemy jedną osobę z tej klasy. Prawdopodobieństwo tego, że będzie to dziewczyna, jest równe

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{1}{9}$

ROZWIĄZANIE

Jeżeli dziewcząt $4n$, a chłopców $5n$, to prawdopodobieństwo wylosowania dziewczyny jest równe

$$\frac{4n}{4n+5n}=\frac{4}{9}.$$

Odpowiedź: **C**

Zadanie 16 (1 pkt)

Z pudełka, w którym jest tylko 6 kul białych i n kul czarnych, losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe $\frac{1}{3}$. Liczba kul czarnych jest równa
A) $n = 2$ B) $n = 12$ C) $n = 9$ D) $n = 18$

Rozwiązanie

Rozwiązujemy równanie

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} = \frac{6}{6+n} \quad & / \cdot 3(6+n) \\ 6+n = 18 \quad \Rightarrow \quad & n = 12. \end{aligned}$$

Odpowiedź: B

Zadanie 17 (1 pkt)

Rzucamy jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech p_i oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek podzielnej przez i. Wtedy
A) $2p_2 = p_4$ B) $2p_3 = p_6$ C) $2p_6 = p_3$ D) $2p_4 = p_2$

Rozwiązanie

Ponieważ $|\Omega| = 6$ mamy kolejno

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{6}{6} = 1 \\ p_2 &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ p_3 &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ p_4 &= \frac{1}{6} \\ p_5 &= \frac{1}{6} \\ p_6 &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

W szczególności $2p_6 = p_3$.

Odpowiedź: C

Zadanie 18 (1 pkt)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu oczek równego cztery jest równe
A) $\frac{5}{36}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{1}{9}$

Rozwiązanie

Wyniki rzutów będziemy zapisywać jako pary (k, n), gdzie k jest wynikiem na pierwszej kostce, a n wynikiem na drugiej. Najpierw obliczamy, ile jest zdarzeń elementarnych

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36.$$

Wypiszmy zdarzenia sprzyjające

$$(1,4), (2,2), (4,1).$$

Zatem prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Odpowiedź: B

Zadanie 19 (1 pkt)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania pary liczb, których iloczyn jest większy od 20, jest równe

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{5}{36}$ D) $\frac{1}{9}$

Rozwiązanie

Wyniki rzutów będziemy zapisywać jako pary (k,n), gdzie k jest wynikiem na pierwszej kostce, a n wynikiem na drugiej. Najpierw obliczamy ile jest zdarzeń elementarnych

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36.$$

Wypiszmy zdarzenia sprzyjające

$$(4,6), (6,4), (5,6), (6,5), (5,5), (6,6).$$

Zatem prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Odpowiedź: B

Zadanie 20 (2 pkt)

Ze zbioru siedmiu liczb naturalnych $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ losujemy dwie różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że większą z wylosowanych liczb będzie liczba 5.

Rozwiązanie

Sposób I

Nieuporządkowaną parę liczb z danego zbioru możemy wybrać na

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

sposobów. Są 4 zdarzenia sprzyjające:

$$\{1,5\},\ \{2,5\},\ \{3,5\},\ \{4,5\}$$

więc interesujące nas prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{4}{21}.$$

Sposób II

Tym razem na zdarzenia sprzyjające patrzymy jak na uporządkowane pary (a,b) wybranych liczb. Takich par jest

$$7 \cdot 6 = 42.$$

Jest ponadto 8 zdarzeń sprzyjających

$$(1,5),\ (2,5),\ (3,5),\ (4,5)$$
$$(5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4).$$

Interesujące nas prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{8}{42} = \frac{4}{21}.$$

Odpowiedź: $\frac{4}{21}$

ZADANIE 21 (1 PKT)

Rzucamy sześć razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech p_i oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia i oczek w i-tym rzucie. Wtedy

A) $p_6 = \frac{1}{6}$ B) $p_3 = \frac{1}{3}$ C) $p_3 = 0$ D) $p_6 = 1$

ROZWIĄZANIE

Prawdopodobieństwo wyrzucenia i-oczek (dla $i = 1,2,3,4,5,6$) jest w każdym rzucie takie samo i wynosi $\frac{1}{6}$.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 22 (1 PKT)

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch orłów w tych trzech rzutach. Wtedy

A) $0,35 < p \leqslant 0,5$ B) $0 \leqslant p < 0,2$ C) $0,5 < p \leqslant 1$ D) $0,2 \leqslant p \leqslant 0,35$

ROZWIĄZANIE

Obliczmy, ile jest zdarzeń elementarnych

$$|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Są 3 zdarzenia sprzyjające

$$(r,o,o),(o,r,o),(o,o,r).$$

Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$p = \frac{3}{8} = 0,375.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 23 (1 PKT)

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie jednego orła w tych trzech rzutach. Wtedy

A) $0,4 < p \leqslant 0,5$ B) $0,25 \leqslant p \leqslant 0,4$ C) $0 \leqslant p < 0,25$ D) $p > 0,5$

ROZWIĄZANIE

Obliczmy, ile jest zdarzeń elementarnych

$$|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Są 3 zdarzenia sprzyjające

$$(r,r,o), (r,o,r), (o,r,r).$$

Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$p = \frac{3}{8} = 0,375.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 24 (1 PKT)

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednej reszki jest równe

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{7}{8}$ D) $\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

Obliczmy, ile jest zdarzeń elementarnych

$$|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Sposób I

Jest 7 zdarzeń sprzyjających

$$\begin{array}{l} (r,r,r) \\ (r,r,o), (r,o,r), (o,r,r) \\ (r,o,o), (o,r,o), (o,o,r). \end{array}$$

Prawdopodobieństwo jest więc równe $\frac{7}{8}$.

Sposób II

Jeżeli przez A oznaczymy interesujące nas zdarzenie polegające na otrzymaniu co najmniej jednej reszki, to zdarzenie przeciwne A' polega na otrzymaniu samych orłów. Zatem

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 25 (1 PKT)

Doświadczenie losowe polega na rzucie dwiema symetrycznymi monetami i sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wynikiem rzutu są dwa orły i sześć oczek na kostce, jest równe

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{48}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{24}$

ROZWIĄZANIE

Możliwe wyniki opisanego doświadczenia to trójki (a,b,c), gdzie a i b są wynikami otrzymanymi na monetach, a c jest liczbą oczek otrzymaną na kostce. Wszystkich takich wyników jest więc

$$2\cdot 2\cdot 6 = 24$$

i interesujące nas prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{24}$.

Odpowiedź: D

ZADANIE 26 (1 PKT)

W każdym z trzech pojemników znajduje się para kul, z których jedna jest czerwona, a druga – niebieska. Z każdego pojemnika losujemy jedną kulę. Niech p oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwie z trzech wylosowanych kul będą czerwone. Wtedy

A) $p=\frac{1}{4}$ B) $p=\frac{3}{8}$ C) $p=\frac{2}{3}$ D) $p=\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

Kulę z każdego z pojemników możemy wybrać na dwa sposoby, więc trzy kule możemy wybrać na

$$2\cdot 2\cdot 2 = 8$$

sposobów. Zdarzenia sprzyjające są 3:

$$(c,c,n),\ (c,n,c),\ (n,c,c).$$

Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{3}{8}.$$

Odpowiedź: B

ZADANIE 27 (1 PKT)

Na loterię przygotowano pulę 100 losów, w tym 4 wygrywające. Po wylosowaniu pewnej liczby losów, wśród których był dokładnie jeden wygrywający, szansa na wygraną była taka sama jak przed rozpoczęciem loterii. Stąd wynika, że wylosowano

A) 20 losów. B) 50 losów. C) 25 losów. D) 4 losy.

ROZWIĄZANIE

Na początku szansa na wygraną wynosiła

$$\frac{4}{100} = \frac{1}{25}.$$

Po wyciągnięciu n losów, wśród których był dokładnie jeden wygrywający, szansa na wygraną jest równa $\frac{3}{100-n}$. Mamy więc równanie

$$\frac{3}{100-n} = \frac{1}{25} \quad / \cdot 25(100-n)$$
$$75 = 100 - n \quad \Rightarrow \quad n = 25.$$

Odpowiedź: C

ZADANIE 28 (2 PKT)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

ROZWIĄZANIE

Liczb dwucyfrowych jest

$$|\Omega| = 99 - 9 = 90$$

(od liczb od 1 do 99 odejmujemy 9 jednocyfrowych). Ile jest liczb podzielnych przez 3 i mniejszych od 40? – łatwo je wypisać:

$$12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39.$$

Zatem prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

Odpowiedź: $\frac{1}{9}$

ZADANIE 29 (2 PKT)

Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek?

ROZWIĄZANIE

Cyfrę tysięcy utworzonej liczby możemy wybrać na 9 sposobów (nie może być 0), a cyfrę dziesiątek na 10 sposobów. Cyfrę setek musimy wybrać ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (żeby cyfra jedności mogła być o 3 większa), czyli na 7 sposobów. Jeżeli chodzi o cyfrę jedności, to nie mamy już żadnego wyboru, bo jest ona wyznaczona jednoznacznie przez cyfrę setek. Jest więc (zasada mnożenia)

$$9 \cdot 10 \cdot 7 = 630$$

takich liczb.

Odpowiedź: 630

Zadanie 30 (2 pkt)

Ze zbioru liczb $\{1,2,4,5,10\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą wylosowaną liczbę jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie

Każdą z liczb możemy wybrać na 5 sposobów, więc

$$|\Omega| = 5\cdot 5 = 25.$$

Wypiszmy wszystkie możliwe zdarzenia sprzyjające:

$$\begin{aligned}
&(10,10),(10,5),(10,2),(10,1)\\
&(5,5),(5,1)\\
&(4,4),(4,2),(4,1)\\
&(2,2),(2,1)\\
&(1,1).
\end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{12}{25}.$$

Odpowiedź: $\frac{12}{25}$

Zadanie 31 (2 pkt)

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6.

Rozwiązanie

Każdą z liczb możemy wybrać na 8 sposobów, więc

$$|\Omega| = 8\cdot 8.$$

Wypiszmy wszystkie możliwe zdarzenia sprzyjające:

$$\begin{aligned}
&(5,1),(6,2),(7,3),(8,4)\\
&(7,1),(8,2).
\end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{6}{8\cdot 8} = \frac{3}{4\cdot 8} = \frac{3}{32}.$$

Odpowiedź: $\frac{3}{32}$

ZADANIE 32 (2 PKT)

Ze zbioru cyfr $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ losujemy kolejno dwie cyfry (losowanie bez zwracania) i tworzymy liczby dwucyfrowe tak, że pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą dziesiątek, a druga – cyfrą jedności. Oblicz prawdopodobieństwo utworzenia liczby podzielnej przez 4.

ROZWIĄZANIE

Dwie cyfry z podanego zbioru można wybrać na $8 \cdot 7$ sposobów. Wypiszmy liczby podzielne przez 4, jakie możemy otrzymać w ten sposób.

$$12, 16, 24, 28, 32, 36, 48,$$
$$52, 56, 64, 68, 72, 76, 84.$$

Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{14}{8 \cdot 7} = \frac{1}{4}.$$

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

ZADANIE 33 (2 PKT)

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby tworzą parę (a,b), gdzie a jest wynikiem pierwszego losowania, b jest wynikiem drugiego losowania. Oblicz, ile jest wszystkich par (a,b) takich, że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Są dwa rodzaje par (a,b), dla których ab jest liczbą parzystą: pary, w których obie liczby są parzyste – takich par jest

$$7 \cdot 6 = 42$$

(pierwszą liczbę wybieramy na 7 sposobów, a drugą na 6 sposobów), oraz takie, w których tylko jedna liczba jest parzysta – takich par jest

$$2 \cdot 7 \cdot 8 = 112$$

(na 2 sposoby wybieramy, która liczba ma być parzysta, potem wybieramy tę liczbę parzystą, a na koniec dobieramy do niej liczbę nieparzystą).

W sumie są więc

$$42 + 112 = 154$$

interesujące nas pary.

Sposób II

Tym razem obliczmy, ile jest par, które nie spełniają warunków zadania. W takich parach obie liczby muszą być nieparzyste, więc jest ich

$$8 \cdot 7 = 56.$$

W takim razie wszystkich par z parzystym iloczynem jest

$$15 \cdot 14 - 56 = 210 - 56 = 154.$$

Odpowiedź: **154**

ZADANIE 34 (4 PKT)

Zbiór M tworzą wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe, w zapisie których występują dwie różne cyfry spośród: 1, 2, 3, 4, 5. Ze zbioru M losujemy jedną liczbę, przy czym każda liczba z tego zbioru może być wylosowana z tym samym prawdopodobieństwem. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę większą od 20, w której cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności.

ROZWIĄZANIE

Obliczmy najpierw ile jest zdarzeń elementarnych. Pierwszą cyfrę tworzonej liczby możemy wylosować na 5 sposobów, a drugą na 4 sposoby (bo musi być różna od pierwszej). Zatem

$$|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20.$$

Wypisujemy teraz liczby dwucyfrowe spełniające podane warunki (czyli zdarzenia sprzyjające).

$$\begin{aligned} &23, 24, 25 \\ &34, 35 \\ &45. \end{aligned}$$

Interesujące nas prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Odpowiedź: $\frac{3}{10}$

ZADANIE 35 (4 PKT)

Mamy dwa pudełka: w pierwszym znajduje się 6 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 6, a w drugim – 8 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 8. Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka i tworzymy liczbę dwucyfrową w ten sposób, że numer kuli wylosowanej z pierwszego pudełka jest cyfrą dziesiątek, a numer kuli wylosowanej z drugiego – cyfrą jedności tej liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że utworzona liczba jest podzielna przez 11.

ROZWIĄZANIE

Dwie cyfry z danych pudełek możemy wybrać na $6 \cdot 8$ sposobów. Wypiszmy liczby podzielne przez 11, jakie możemy otrzymać w ten sposób.

$$11, 22, 33, 44, 55, 66$$

Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{6}{6 \cdot 8} = \frac{1}{8}.$$

Odpowiedź: $\frac{1}{8}$

ZADANIE 36 (4 PKT)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

ROZWIĄZANIE

Wszystkich liczb dwucyfrowych jest $99-9=90$, więc parę różnych liczb (a,b) możemy wylosować na

$$90\cdot 89$$

sposobów. Jeżeli suma liczb a i b ma być równa 30, to mamy 10 zdarzeń sprzyjających

$$\begin{array}{c}(10,20),\ (11,19),\ (12,18),\ (13,17),\ (14,16)\\ (16,14),\ (17,13),\ (18,12),\ (19,11),\ (20,10).\end{array}$$

Interesujące nas prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{10}{90\cdot 89}=\frac{1}{9\cdot 89}=\frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: $\frac{1}{801}$

ZADANIE 37 (2 PKT)

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losowo wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy liczbę podzielną przez 8 lub liczbę podzielną przez 12.

ROZWIĄZANIE

Liczb dwucyfrowych jest $99-9=90$, więc

$$|\Omega|=90.$$

Sposób I

Liczby dwucyfrowe podzielne przez 8 to:

$$16,24,32,40,48,56,64,72,80,88,96.$$

Jak widać jest ich 11.

Liczby dwucyfrowe podzielne przez 12 to:

$$12,24,36,48,60,72,84,96.$$

Jest ich 8, ale tylko 4 z nich nie występują na poprzedniej licie. Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{11+4}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}.$$

Sposób II

Liczby podzielne przez 8 to liczby

$$16 = 2 \cdot 8,\ 24 = 3 \cdot 8,\ 32 = 4 \cdot 8, \ldots, 96 = 12 \cdot 8.$$

Jest ich zatem 11. Podobnie liczymy liczbę liczb podzielnych przez 12

$$12 = 1 \cdot 12,\ 24 = 2 \cdot 12,\ 36 = 3 \cdot 12, \ldots, 96 = 8 \cdot 12.$$

Jest ich 8.

Doszliśmy teraz do delikatnego momentu, jeżeli dodamy do siebie wyliczone liczby, to **nie będzie** to liczba liczb podzielnych przez 8 lub 12. Powód jest prosty: liczby które są podzielne jednocześnie przez 8 i 12 (czyli przez 24) policzyliśmy podwójnie. Musimy zatem od tej sumy odjąć liczbę liczb podzielnych przez 24. Są 4 takie liczby:

$$24, 48, 72, 96.$$

Możemy już obliczyć szukane prawdopodobieństwo

$$P(A) = \frac{11 + 8 - 4}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

Odpowiedź: $\frac{1}{6}$

Zadanie 38 (2 pkt)

Dane są dwa podzbiory zbioru liczb całkowitych:

$$K = \{-4, -1, 1, 5, 6\} \text{ i } L = \{-3, -2, 2, 3, 4\}.$$

Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

Rozwiązanie

Każdą z liczb możemy wybrać na 5 sposobów, więc

$$|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25.$$

W zdarzeniach sprzyjających obie liczby muszą być tego samego znaku, tzn. albo obie są ujemne, albo obie są dodatnie. Dwie liczby ujemne możemy wybrać na

$$2 \cdot 2 = 4$$

sposoby (każdą z liczb na dwa sposoby), a dwie dodatnie na

$$3 \cdot 3 = 9$$

sposobów. Interesujące nas prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{4 + 9}{25} = \frac{13}{25}.$$

Odpowiedź: $\frac{13}{25}$

ZADANIE 39 (4 PKT)

Wśród 115 osób przeprowadzono badania ankietowe, związane z zakupami w pewnym kiosku. W poniższej tabeli przedstawiono informacje o tym, ile osób kupiło bilety tramwajowe ulgowe oraz ile osób kupiło bilety tramwajowe normalne.

Rodzaj kupionych biletów	Liczba osób
ulgowe	76
normalne	41

Uwaga! 27 osób spośród ankietowanych kupiło oba rodzaje biletów.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że osoba losowo wybrana spośród ankietowanych nie kupiła żadnego biletu. Wynik przedstaw w formie nieskracalnego ułamka.

ROZWIĄZANIE

Wiemy, że osób które kupiły tylko bilety ulgowe jest

$$76 - 27 = 49,$$

a osób, które kupiły tylko bilety normalne jest

$$41 - 27 = 14.$$

W takim razie osób, które nie kupiły żadnego biletu jest

$$115 - 49 - 14 - 27 = 25$$

i interesujące nas prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{25}{115} = \frac{5}{23}.$$

Odpowiedź: $\frac{5}{23}$

ZADANIE 40 (4 PKT)

Zakupiono 16 biletów do teatru, w tym 10 biletów na miejsca od 1. do 10. w pierwszym rzędzie i 6 biletów na miejsca od 11. do 16. w szesnastym rzędzie. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że 2 wylosowane bilety, spośród szesnastu, będą biletami na sąsiadujące miejsca?

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Przyjmijmy za zdarzenia elementarne nieuporządkowane pary wylosowanych biletów. Mamy wtedy

$$|\Omega| = \binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 8 \cdot 15.$$

Jest dokładnie $9 + 5 = 14$ zdarzeń sprzyjających (9 par w pierwszym rzędzie i 5 w szesnastym), więc interesujące nas prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{14}{8 \cdot 15} = \frac{7}{4 \cdot 15} = \frac{7}{60}.$$

Sposób II

Tym razem za zdarzenia elementarne przyjmijmy pary uporządkowane wylosowanych biletów. Mamy zatem

$$|\Omega| = 16 \cdot 15.$$

Wśród zakupionych biletów jest $9 + 5 = 14$ par biletów na sąsiadujące miejsca (9 par w pierwszym rzędzie i 5 w szesnastym), co daje nam $2 \cdot 14$ par uporządkowanych (bilety możemy w takiej parze umieścić na 2 sposoby). Interesujące nas prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{2 \cdot 14}{16 \cdot 15} = \frac{7}{4 \cdot 15} = \frac{7}{60}.$$

Odpowiedź: $\frac{7}{60}$

Arkusz zadań znajdziesz na stronie
HTTPS://WWW.ZADANIA.INFO/2572_2499